

Un tutorial sobre señales en cuadratura: complejo, pero no complicado

por Richard Lyons [December 2017] / Traducción español José Urrutia - EA4HBY 29 noviembre 2025

Introducción

Las señales de cuadratura se basan en la noción de números complejos, y quizás ningún otro tema cause más angustia a quienes se inician en DSP que estos números y su extraña terminología: operador j , complejo, imaginario, real y ortogonal. Si no está seguro del significado físico de los números complejos y del operador $j = \sqrt{-1}$, no se preocupe, porque no está solo. ¿Por qué incluso Karl Gauss, uno de los matemáticos más importantes del mundo, llamó al operador j la "sombra de sombras"? Aquí arrojaremos algo de luz sobre esa sombra para que nunca tenga que llamar a la línea directa de ayuda psíquica de señales de cuadratura.

El procesamiento de señales en cuadratura se utiliza en muchos campos de la ciencia y la ingeniería, y las señales en cuadratura son necesarias para describir el procesamiento y la implementación que se lleva a cabo en los sistemas de comunicaciones digitales modernos. En este tutorial, repasaremos los fundamentos de los números complejos y nos familiarizaremos con su uso para representar señales en cuadratura. A continuación, examinaremos el concepto de frecuencia negativa en relación con la notación algebraica de señales en cuadratura y aprenderemos a hablar el lenguaje del procesamiento en cuadratura. Además, utilizaremos gráficos tridimensionales en el dominio del tiempo y la frecuencia para dar un significado físico a las señales en cuadratura. Este tutorial concluye con un breve vistazo a cómo se puede generar una señal en cuadratura mediante muestreo en cuadratura.

¿Por qué preocuparse por las señales de cuadratura?

Los formatos de señales en cuadratura, también llamados señales complejas, se utilizan en numerosas aplicaciones de procesamiento digital de señales, como:

- sistemas de comunicaciones digitales,
- sistemas de radar,
- procesamiento de la diferencia de tiempo de llegada en sistemas de radiogoniometría,
- sistemas de medición de pulsos coherentes,- aplicaciones de formación de haz de antena,
- moduladores de banda lateral única,
- etc.

Estas aplicaciones se enmarcan en la categoría general conocida como procesamiento en cuadratura y proporcionan mayor potencia de procesamiento mediante la medición coherente de la fase de señales sinusoidales.

Una señal en cuadratura es una señal bidimensional cuyo valor en un instante determinado puede especificarse mediante un único número complejo compuesto por dos partes: la parte real y la parte imaginaria. (Los términos «real» e «imaginario», aunque tradicionales, resultan desafortunados debido a sus significados en el lenguaje cotidiano. Los ingenieros de comunicaciones utilizan los términos «en fase» y «fase en cuadratura». Más adelante se hablará de ello). Repasemos la notación matemática de estos números complejos.

El desarrollo y la notación de números complejos

Para establecer nuestra terminología, definimos un número real como aquellos números que usamos en la vida cotidiana, como un voltaje, una temperatura en la escala Fahrenheit o el saldo de una cuenta corriente. Estos números unidimensionales pueden ser positivos o negativos, como se muestra en la Figura 1(a). En dicha figura, mostramos un eje unidimensional y decimos que un solo número real puede representarse mediante un punto en dicho eje. Tradicionalmente, llamaremos a este eje el eje real.

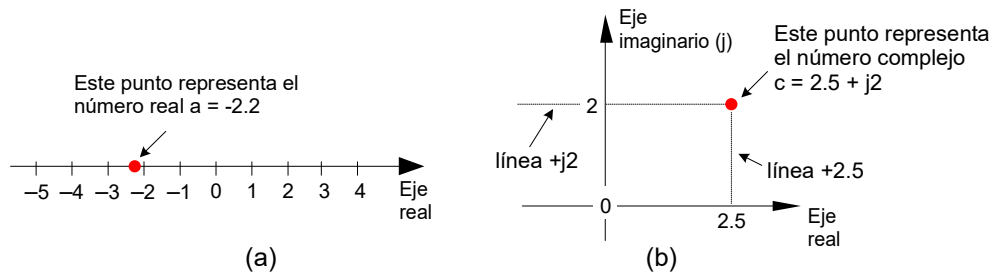


Figura 1. Una interpretación gráfica de un número real y un número complejo.

Un número complejo, c , se muestra en la Figura 1(b), donde también se representa como un punto. Sin embargo, los números complejos no se limitan a una línea unidimensional, sino que pueden residir en cualquier punto de un plano bidimensional. Este plano se denomina plano complejo (algunos matemáticos lo llaman diagrama de Argand) y permite representar números complejos con partes reales e imaginarias. Por ejemplo, en la Figura 1(b), el número complejo $c = 2,5 + j2$ es un punto que no se encuentra en el plano complejo ni en el eje real ni en el imaginario. Localizamos el punto c desplazándonos 2,5 unidades a lo largo del eje real y 2 unidades hacia arriba a lo largo del eje imaginario. Piensa en estos ejes real e imaginario exactamente como piensas en las direcciones Este-Oeste y Norte-Sur en un mapa de carreteras.

Utilizaremos un punto de vista geométrico para comprender algunos aspectos de la aritmética de los números complejos. Observando la Figura 2, podemos usar la trigonometría de triángulos rectángulos para definir varias formas de representar el número complejo c .

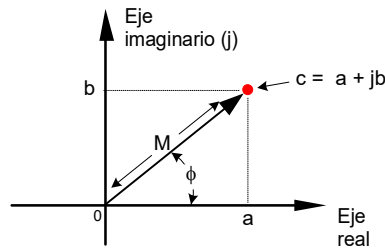


Figura 2 La representación fasorial del número complejo $c = a + jb$ en el plano complejo.

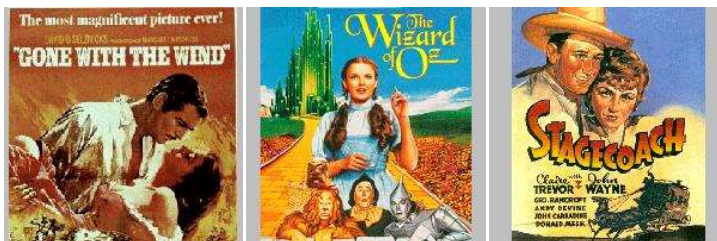
Nuestro número complejo c está representado de diferentes maneras en la literatura, como por ejemplo:

Notación Nombre:	Expresión Matemática:	Observaciones:
Forma rectangular:	$c = a + jb$	Se utiliza con fines explicativos. Es la más fácil de entender. [También llamada forma cartesiana]. (1)
Forma trigonométrica:	$c = M[\cos(\phi) + j\sin(\phi)]$	Se utiliza comúnmente para describir señales en cuadratura en sistemas de comunicaciones. (2)
Forma polar:	$c = Me^{j\phi}$	La más desconcertante, pero la principal forma utilizada en ecuaciones matemáticas. [También llamada forma exponencial. A veces se escribe como $M\exp(j\phi)$.] (3)
Forma magnitud-ángulo:	$c = M\angle\phi$	Se utiliza con fines descriptivos, pero es demasiado engorroso para su uso en ecuaciones algebraicas. (4)

Las ecuaciones (3) y (4) nos recuerdan que c también puede considerarse el vértice de un fasor en el plano complejo, con magnitud M , orientado en la dirección de ϕ radianes con respecto al eje real positivo, como se muestra en la Figura 2. Tenga en cuenta que c es un número complejo y que las variables a , b , M y ϕ son números reales. La magnitud de c , a veces llamada módulo de c , es

$$M = |c| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (5)$$

[Pregunta trivía: ¿En qué película de 1939, considerada por muchos como la mejor película jamás realizada, un personaje principal intentó citar la ecuación (5)?]



Bien, volvamos al tema. El ángulo de fase ϕ , o argumento, es la arcotangente de la relación parte imaginaria / parte real, o

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right) \quad (6)$$

Si establecemos la ecuación (3) igual a la ecuación (2), $Me^{j\phi} = M[\cos(\phi) + j\sin(\phi)]$, podemos enunciar lo que se nombra en su honor y ahora se llama una de las identidades de Euler como:

$$e^{j\phi} = \cos(\phi) + j\sin(\phi) \quad (7)$$

El lector desconfiado debería preguntarse ahora: "¿Por qué es válido representar un número complejo usando esa extraña expresión de la base de los logaritmos naturales, e , elevada a una potencia imaginaria?". Podemos validar la ecuación (7), como hizo el mayor experto mundial en series infinitas, Herr Leonard Euler, sustituyendo $j\phi$ por z en la definición de desarrollo en serie de e^z en la línea superior de la Figura 3. Dicha sustitución se muestra en la segunda línea.

$$\begin{aligned}
 e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \dots \\
 e^{j\phi} &= 1 + j\phi + \frac{(j\phi)^2}{2!} + \frac{(j\phi)^3}{3!} + \frac{(j\phi)^4}{4!} + \frac{(j\phi)^5}{5!} + \frac{(j\phi)^6}{6!} + \dots \\
 &= 1 + j\phi - \frac{\phi^2}{2!} - j\frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^4}{4!} + j\frac{\phi^5}{5!} - \frac{\phi^6}{6!} + \dots
 \end{aligned}$$
$$e^{j\phi} = \cos(\phi) + j\sin(\phi)$$

Figura 3 Una derivación de la ecuación de Euler utilizando expansiones en serie para e^z , $\cos(\phi)$ y $\sin(\phi)$.

A continuación, evaluamos los órdenes superiores de j para llegar a la serie en la tercera línea de la figura. Quienes tengan conocimientos matemáticos avanzados, como Euler (o quienes consulten algún libro de referencia de matemáticas), reconocerán que los términos alternados en la tercera línea son las definiciones de desarrollo en serie de las funciones coseno y seno.

La Figura 3 verifica la Ecuación (7) y nuestra representación de un número complejo mediante la forma polar de la Ecuación (3): $Me^{j\phi}$. Si se sustituye $-j\phi$ por z en la línea superior de la Figura 3, se obtiene una forma ligeramente diferente, y muy útil, de la identidad de Euler:

$$e^{-j\phi} = \cos(\phi) - j\sin(\phi) \quad (8)$$

La forma polar de las ecuaciones (7) y (8) nos beneficia porque:

- Simplifica las derivaciones y el análisis matemáticos,
 - Convierte las ecuaciones trigonométricas en el álgebra simple de exponentes,
 - Las operaciones matemáticas con números complejos siguen exactamente las mismas reglas que con los números reales.
- Convierte la suma de señales en simplemente la suma de números complejos (suma vectorial),
- Es la notación más concisa,
- Es indicativa de cómo se implementan y describen los sistemas de comunicaciones digitales en la literatura.

Utilizaremos las ecuaciones (7) y (8) para ver por qué y cómo se utilizan las señales en cuadratura en aplicaciones de comunicaciones digitales. Pero primero, respiremos hondo y entremos en la dimensión desconocida del operador « j ».

Ya has visto la definición de $j = \sqrt{-1}$. Expresada en palabras, decimos que j representa un número que, multiplicado por sí mismo, da como resultado un número negativo. Esta definición puede ser difícil para quienes empiezan, ya que todos sabemos que cualquier número multiplicado por sí mismo siempre da como resultado un número positivo.

Desafortunadamente, los libros de texto de DSP a menudo definen el símbolo j y luego, con justificada prisa, pasan rápidamente a explicar todas las formas en que el operador j puede usarse para analizar señales sinusoidales. Los lectores pronto olvidan la pregunta: ¿Qué significa $j = \sqrt{-1}$ ¿que significa realmente?

Bueno, $\sqrt{-1}$ había estado en la escena matemática durante algún tiempo, pero no fue tomado en serio hasta que tuvo que usarse para resolver ecuaciones cúbicas en el siglo XVI. [1], [2] Los matemáticos comenzaron a aceptar a regañadientes el concepto abstracto de $\sqrt{-1}$, sin tener que visualizarlo, porque sus propiedades matemáticas eran consistentes con la aritmética de los números reales normales.

Fue la equiparación de Euler de los números complejos con senos y cosenos reales, y la brillante introducción del plano complejo por Gauss, lo que finalmente legitimó la noción de $\sqrt{-1}$ ante los matemáticos europeos del siglo XVIII. Euler, trascendiendo el ámbito de los números reales, demostró que los números complejos tenían una relación clara y consistente con las conocidas funciones trigonométricas reales de senos y cosenos. Así como Einstein demostró la equivalencia de masa y energía, Euler demostró la equivalencia de senos y cosenos reales con los números complejos. Así como los físicos modernos desconocen qué es un electrón, pero comprenden sus propiedades, nosotros no nos preocuparemos por qué es « j » y nos conformaremos con comprender su comportamiento. Para nuestros propósitos, el operador « j » significa rotar un número complejo 90° en sentido antihorario. (Para los británicos, «antihorario» significa en sentido contrario a las agujas del reloj). Veamos por qué.

Nos familiarizaremos con la representación plana compleja de números imaginarios examinando las propiedades matemáticas del operador $j = \sqrt{-1}$ como

se muestra en la Figura 4.

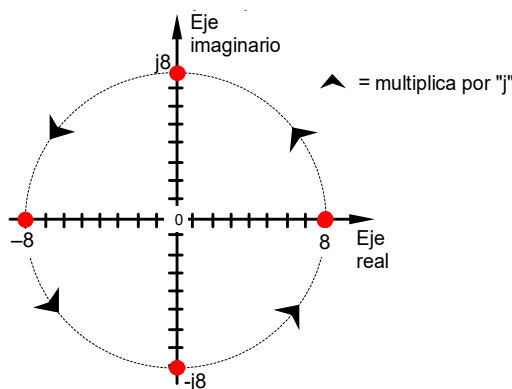


Figura 4. ¿Qué sucede con el número real 8 cuando comienzas a multiplicarlo por j

Multiplicar cualquier número en el eje real por j da como resultado un producto imaginario que se encuentra en el eje imaginario. El ejemplo de la Figura 4 muestra que si +8 está representado por el punto que se encuentra en el eje real positivo, multiplicar +8 por j da como resultado un número imaginario, +j8, cuya posición se ha rotado 90° en sentido antihorario (desde +8), colocándolo en el eje imaginario positivo. De manera similar, multiplicar +j8 por j da como resultado otra rotación de 90°, lo que da como resultado el -8 que se encuentra en el eje real negativo, ya que $j^2 = -1$. Multiplicar -8 por j da como resultado otra rotación de 90°, lo que da como resultado el -j8 que se encuentra en el eje imaginario negativo. Siempre que cualquier número representado por un punto se multiplica por j, el resultado es una rotación de 90° en sentido antihorario. (A la inversa, la multiplicación por -j da como resultado una rotación de -90° en el sentido horario en el plano complejo).

Si dejamos $\phi = \pi/2$ en la ecuación 7, podemos decir que

$$e^{j\pi/2} = \cos(\pi/2) + j\sin(\pi/2) = 0 + j1, \text{ or}$$

$$e^{j\pi/2} = j \tag{9}$$

Este es el punto a recordar. Si tienes un solo número complejo, representado por un punto en el plano complejo, multiplicarlo por j o por $e^{j\pi/2}$ dará como resultado un nuevo número complejo rotado 90° en sentido antihorario (CCW) en el plano complejo. No olvides esto, ya que te será útil al comenzar a leer la literatura sobre sistemas de procesamiento en cuadratura.

Hagamos una pausa para recuperar el aliento. No se preocupen si las ideas de números imaginarios y el plano complejo les parecen un poco misteriosas. Al principio, a todos nos resulta así; se familiarizarán con ellas cuanto más las usen. (Recuerden que el operador j desconcertó a los matemáticos europeos más influyentes durante siglos). Es cierto que las matemáticas de los números complejos no solo son un poco extrañas al principio, sino que la terminología es casi extraña. Si bien el término "imaginario" es desafortunado, el término "complejo" es francamente extraño. Al principio, la frase "números complejos" nos hace pensar en "números complicados". Esto es lamentable, ya que el concepto de números complejos no es tan complicado. Simplemente sepan que el propósito de esta jerga matemática era validar las ecuaciones (2), (3), (7) y (8). Ahora, hablemos (¡por fin!) de las señales en el dominio del tiempo.

Representación de señales reales mediante fasores complejos

Bien, ahora nos centraremos en un número complejo que es una función del tiempo. Consideremos un número cuya magnitud es uno y cuyo ángulo de fase aumenta con el tiempo. Ese número complejo es el punto $e^{j2\omega t}$ que se muestra en la Figura 5(a). (Aquí el

El término $2\pi f_0$ es la frecuencia en radianes/segundo y corresponde a una frecuencia de f_0 ciclos/segundo, donde f_0 se mide en hercios. A medida que el tiempo t aumenta, el ángulo de fase del número complejo aumenta y nuestro número orbita el origen del plano complejo en sentido antihorario. La Figura 5(a) muestra el número, representado por el punto negro, congelado en un instante arbitrario. Si, por ejemplo, la frecuencia $f_0 = 2$ Hz, el punto rotaría alrededor del círculo dos veces por segundo. También podemos pensar en otro número complejo $e^{-j2\pi f_0 t}$ (el punto blanco) orbitando en sentido horario, ya que su ángulo de fase se vuelve más negativo a medida que aumenta el tiempo.

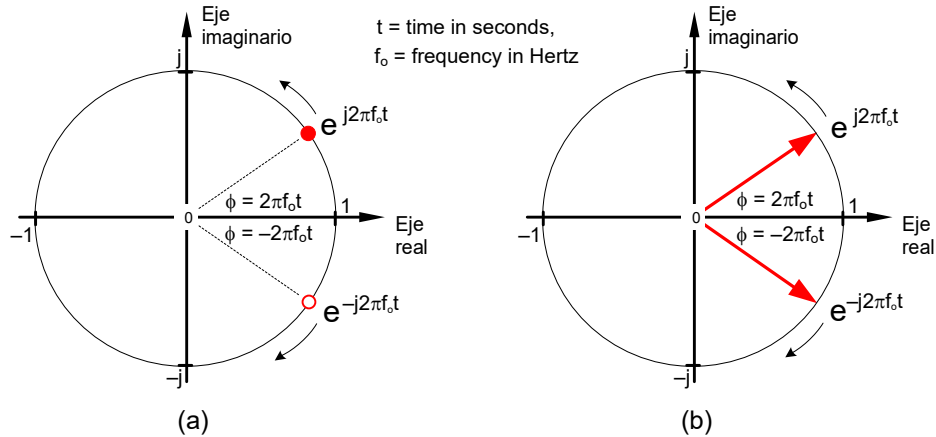


Figura 5. Una instantánea, en el tiempo, de dos números complejos cuyos exponentes cambian con el tiempo.

Llamemos ahora a nuestras dos expresiones complejas $e^{j2\pi f_0 t}$ y $e^{-j2\pi f_0 t}$ señales en cuadratura. Cada una tiene partes reales e imaginarias en cuadratura, y ambas son funciones del tiempo. En la literatura, estas expresiones $e^{j2\pi f_0 t}$ y $e^{-j2\pi f_0 t}$ se denominan a menudo exponenciales complejas.

También podemos considerar estas dos señales en cuadratura, $e^{j2\pi f_0 t}$ y $e^{-j2\pi f_0 t}$, como las puntas de dos fasores que giran en direcciones opuestas, como se muestra en la Figura 5(b). Por ahora, seguiremos con esta notación fasorial, ya que nos permitirá lograr nuestro objetivo de representar sinusoides reales en el contexto del plano complejo. ¡No toques ese dial!

Para comprender el comportamiento de estos fasores, la Figura 6(a) muestra la trayectoria tridimensional del fador $e^{j2\pi f_0 t}$ a medida que transcurre el tiempo. Hemos añadido el eje del tiempo, que sobresale de la página, para mostrar la trayectoria espiral del fador. La Figura 6(b) muestra una versión continua de solo la punta del fador $e^{j2\pi f_0 t}$. Ese número complejo $e^{j2\pi f_0 t}$, o si se prefiere, la punta del fador, sigue una trayectoria en espiral a lo largo del eje del tiempo, centrada en él. Las partes real e imaginaria de $e^{j2\pi f_0 t}$ se muestran como proyecciones seno y coseno en la Figura 6 (b).

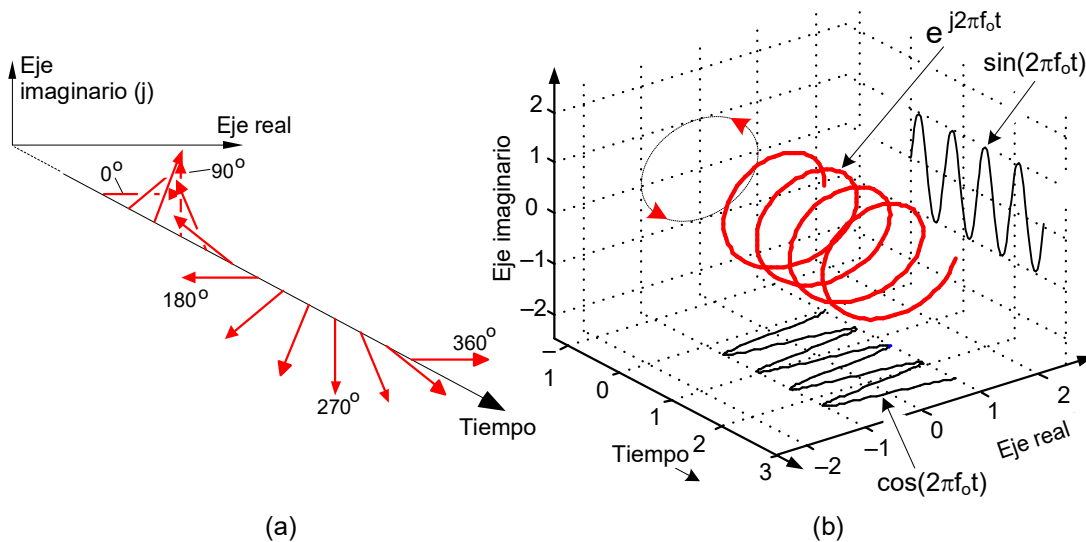


Figura 6. El movimiento del fasor $e^{j2\pi f_0 t}$ (a) y la punta del fasor (b).

Regrese a la Figura 5(b) y pregúntese: ¿cuál es la suma vectorial de esos dos fasores al girar en direcciones opuestas? Piense en esto por un momento... Así es, las partes reales de los fasores siempre se sumarán constructivamente, y sus partes imaginarias siempre se cancelarán. Esto significa que la suma de estos fasores $e^{j2\pi f_0 t}$ y $e^{-j2\pi f_0 t}$ siempre será un número real puro. ¡Las implementaciones de los sistemas de comunicaciones digitales modernos se basan en esta propiedad!

Para enfatizar la importancia de la suma real de estas dos sinusoides complejas, dibujaremos otra imagen. Considere la forma de onda en la Figura 7 tridimensional generada por la suma de dos fasores complejos de media magnitud, $e^{j2\pi f_0 t}/2$ y $e^{-j2\pi f_0 t}/2$, que giran en direcciones opuestas alrededor del eje del tiempo y descienden a lo largo de él.

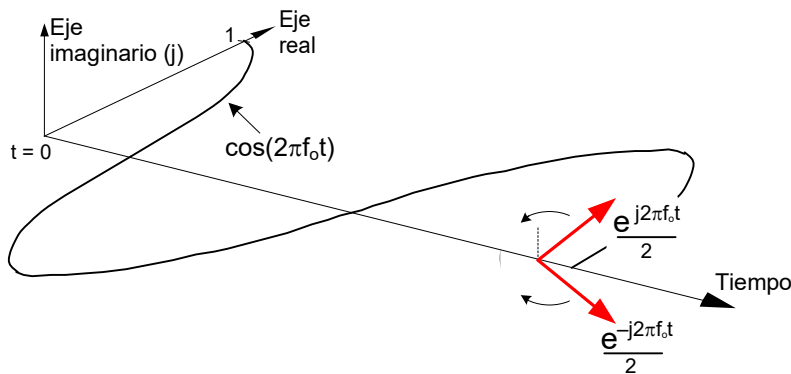


Figura 7. Un coseno representado por la suma de dos fasores complejos rotatorios.

Pensando en estos fasores, ahora está claro por qué la onda coseno puede equipararse a la suma de dos exponenciales complejas por

$$\cos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} = \frac{e^{j2\pi f_0 t}}{2} + \frac{e^{-j2\pi f_0 t}}{2}. \quad (10)$$

La ecuación (10), una expresión conocida e importante, también se denomina identidad de Euler. Podríamos haber obtenido esta identidad resolviendo las ecuaciones (7) y (8)

para $j\sin(\phi)$, igualando esas dos expresiones y resolviendo la ecuación final para $\cos(\phi)$. De manera similar, podríamos realizar el mismo ejercicio de álgebra y demostrar que una onda sinusoidal real también es la suma de dos exponenciales

$$\sin(2\pi f_0 t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j} = \frac{j}{2} \frac{e^{-j2\pi f_0 t}}{1} - \frac{j}{2} \frac{e^{j2\pi f_0 t}}{1} . \quad (11)$$

Analice atentamente las ecuaciones (10) y (11). Son las expresiones estándar para una onda coseno y una onda seno, utilizando notación compleja, presentes en la literatura sobre sistemas de comunicaciones en cuadratura. Para evitar que el lector se desoriente como esos complejos fasores, tenga en cuenta que el único propósito de las figuras 5 a 7 es validar las expresiones complejas de la onda coseno y seno dadas en las ecuaciones (10) y (11). Estas dos ecuaciones, junto con las ecuaciones (7) y (8), son la piedra de Rosetta del procesamiento de señales en cuadratura.

$\cos(2\pi f_0 t) =$
 $\frac{e^{j2\pi f_0 t}}{2} + \frac{e^{-j2\pi f_0 t}}{2}$

Ahora podemos traducir fácilmente, de ida y vuelta, entre sinusoides reales y exponenciales complejas. De nuevo, estamos aprendiendo cómo las señales reales, que pueden transmitirse por un cable coaxial o digitalizarse y almacenarse en la memoria de una computadora, pueden representarse en notación de números complejos. Sí, las partes constituyentes de un número complejo son reales, pero las tratamos de una manera especial: las tratamos en cuadratura.

Representación de señales en cuadratura en el dominio de la frecuencia

Ahora que conocemos la naturaleza temporal de las señales en cuadratura, estamos listos para analizar sus descripciones en el dominio de la frecuencia. Este material es crucial, ya que añadiremos una tercera dimensión, el tiempo, a nuestros gráficos bidimensionales habituales en el dominio de la frecuencia. De esta forma, ninguna de las relaciones de fase de nuestras señales en cuadratura quedará oculta. La Figura 8 nos muestra las reglas para representar exponenciales complejas en el dominio de la frecuencia.

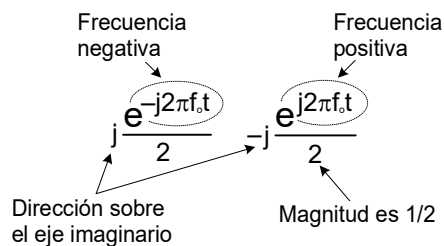


Figura 8. Interpretación de exponenciales complejas.

Representaremos una exponencial compleja como un impulso de banda estrecha ubicado en la frecuencia especificada en el exponente. Además, mostraremos las relaciones de fase entre los espectros de dichas exponenciales complejas a lo largo de los ejes real e imaginario de nuestra representación en el dominio de frecuencia complejo. Dicho esto, observe la Figura 9.

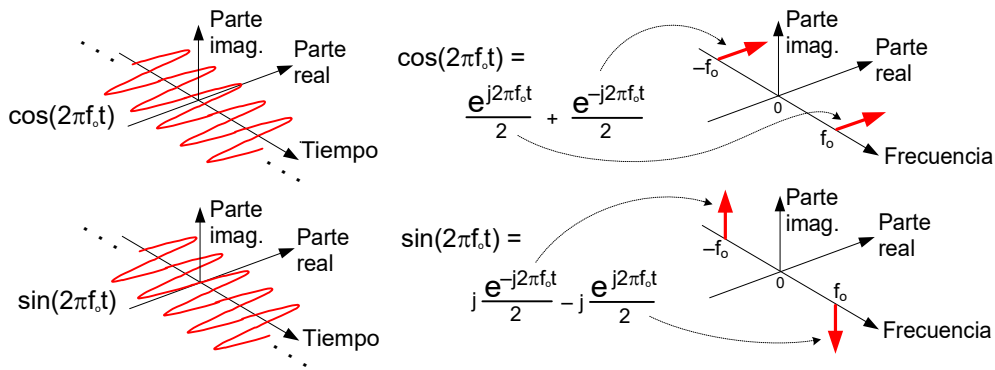


Figura 9. Representación compleja en el dominio de frecuencia de una onda coseno y una onda seno.

Vea cómo se representan una onda coseno real y una onda seno real en nuestra representación compleja del dominio de la frecuencia en el lado derecho de la Figura 9. Esas flechas en negrita a la derecha de la Figura 9 no son fasores rotatorios, sino símbolos de impulso del dominio de la frecuencia que indican una sola línea espectral para un solo exponencial complejo $e^{j2\pi f_0 t}$. Las direcciones en las que apuntan los impulsos espectrales simplemente indican las fases relativas de los componentes espectrales. La amplitud de esos impulsos espectrales es 1/2. OK ... ¿por qué nos molestamos con esta representación del dominio de la frecuencia en 3-D? Porque es la herramienta que usaremos para comprender la generación (modulación) y la detección (demodulación) de señales en cuadratura en sistemas de comunicaciones digitales (y algunos analógicos), y esos son dos de los objetivos de este tutorial. Sin embargo, antes de considerar esos procesos, validemos esta representación del dominio de la frecuencia con un pequeño ejemplo.

La Figura 10 es un ejemplo sencillo de cómo utilizamos el dominio de frecuencia complejo. En ella, comenzamos con una onda sinusoidal real, le aplicamos el operador j y, a continuación, sumamos el resultado a una onda coseno real de la misma frecuencia. El resultado final es la exponencial compleja única $e^{j2\pi f_0 t}$, que ilustra gráficamente la identidad de Euler que establecimos matemáticamente en la ecuación (7).

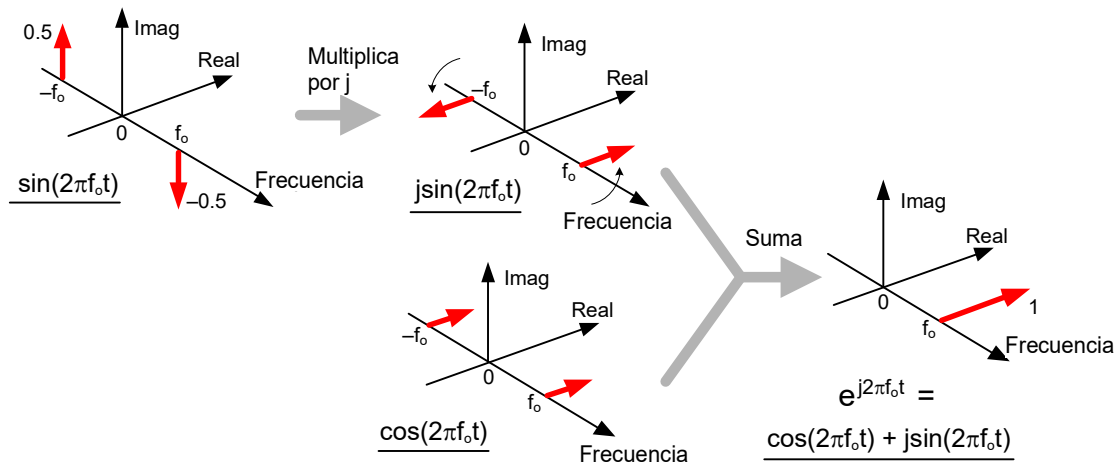


Figura 10. Vista compleja del dominio de frecuencia de Euler: $e^{j2\pi f_0 t} = \cos(2\pi f_0 t) + j\sin(2\pi f_0 t)$.

En el eje de frecuencia, la noción de frecuencia negativa se considera como aquellos impulsos espectrales ubicados a $-2\pi f_0$ radianes/s en el eje de frecuencia. Esta figura muestra la gran ventaja: cuando usamos notación compleja, las exponenciales complejas genéricas como $e^{j2\pi f_0 t}$ y $e^{-j2\pi f_0 t}$ son los componentes fundamentales de las sinusoides reales

$\sin(2\pi ft)$ o $\cos(2\pi ft)$. Esto se debe a que tanto $\sin(2\pi ft)$ como $\cos(2\pi ft)$ se componen de componentes $e^{j2\pi ft}$ y $e^{-j2\pi ft}$. Si se tomara la transformada de Fourier discreta (DFT) de muestras discretas en el dominio temporal de una onda sinusoidal $\sin(2\pi f_0 t)$, una onda coseno $\cos(2\pi f_0 t)$ o una sinusoida compleja $e^{j2\pi f_0 t}$ y se representaran gráficamente los resultados complejos, se obtendrían exactamente los impulsos de banda estrecha de la Figura 10.

Si entiende la notación y las operaciones de la Figura 10, puede felicitarse porque sabe mucho sobre la naturaleza y las matemáticas de las señales en cuadratura.

Señales de cuadratura de paso de banda en el dominio de la frecuencia

En el procesamiento en cuadratura, por convención, la parte real del espectro se denomina componente en fase y la parte imaginaria, componente de cuadratura. Las señales cuyos espectros complejos se muestran en las Figuras 11(a), (b) y (c) son reales, y en el dominio temporal pueden representarse mediante valores de amplitud con partes reales distintas de cero y partes imaginarias con valor cero. No estamos obligados a usar notación compleja para representarlas en el dominio temporal- las señales son reales.

Las señales reales siempre tienen componentes espectrales de frecuencia positivos y negativos. En cualquier señal real, los componentes de frecuencia positivos y negativos de su espectro en fase (real) siempre presentan simetría uniforme alrededor del punto de frecuencia cero. Es decir, los componentes de frecuencia positivos y negativos de la parte en fase son imágenes especulares entre sí.

Por el contrario, los componentes de frecuencia positivos y negativos de su espectro en cuadratura (imaginario) siempre son negativos entre sí. Esto significa que el ángulo de fase de cualquier componente de frecuencia positivo en cuadratura es el negativo del ángulo de fase del componente de frecuencia negativo en cuadratura correspondiente, como lo muestran las flechas delgadas y sólidas en la Figura 11(a). Esta «simetría conjugada» es la naturaleza invariante de las señales reales cuando sus espectros se representan mediante notación compleja.

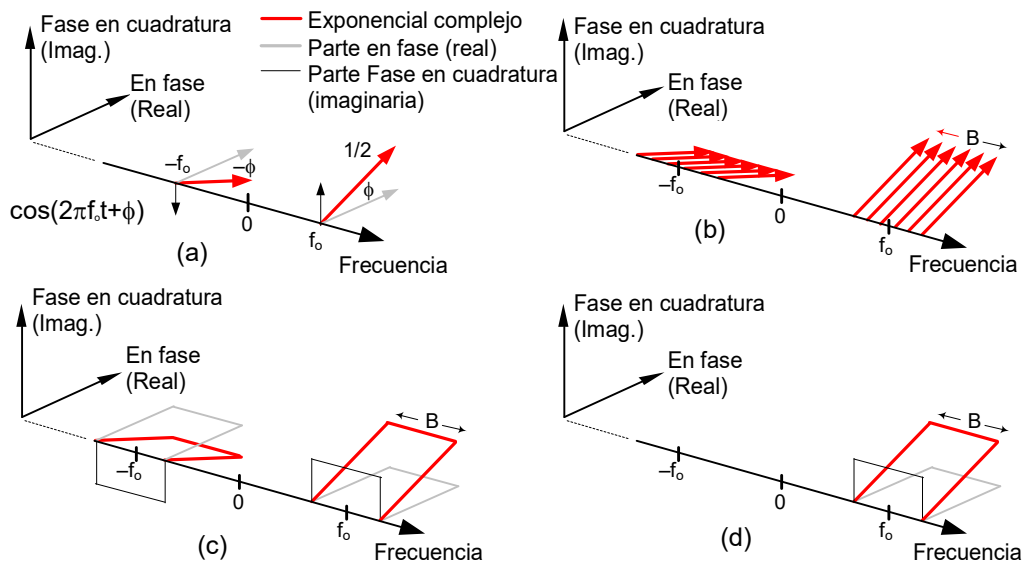


Figura 11. Representación en cuadratura de señales: (a) Sinusoida real $\cos(2\pi f_0 t + \phi)$, (b) Señal paso banda real que contiene seis sinusoides sobre un ancho de banda B; (c) Señal paso banda real que contiene un número infinito de sinusoides sobre un ancho de banda B Hz; (d) Señal paso banda compleja de ancho de banda B Hz.

Recordemos de nuevo que las flechas en negrita de las Figuras 11(a) y (b) no son fasores rotatorios. Son símbolos de impulso en el dominio de la frecuencia que indican

un exponencial complejo único $e^{j2\pi ft}$. Las direcciones en las que apuntan los impulsos muestran las fases relativas de los componentes espectrales.

En cuanto al espectro de frecuencia positiva de la Figura 11(d), este es el espectro de una señal paso banda analógica de valor complejo en el dominio del tiempo. Dicha señal no presenta simetría espectral centrada en cero Hz, como sí lo hacen las señales de valor real en el dominio del tiempo, ya que no tiene energía espectral de frecuencia negativa.

Hay un principio importante que debemos tener en cuenta antes de continuar. Multiplicar una señal temporal por la exponencial compleja $e^{j2\pi f_0 t}$, lo que llamamos mezcla en cuadratura (también llamada mezcla compleja), desplaza el espectro de esa señal hacia arriba en frecuencia en f_0 Hz, como se muestra en las Figuras 12 (a) y (b). Asimismo, multiplicar una señal temporal por $e^{-j2\pi f_0 t}$ desplaza el espectro de esa señal hacia abajo en frecuencia en f_0 Hz.

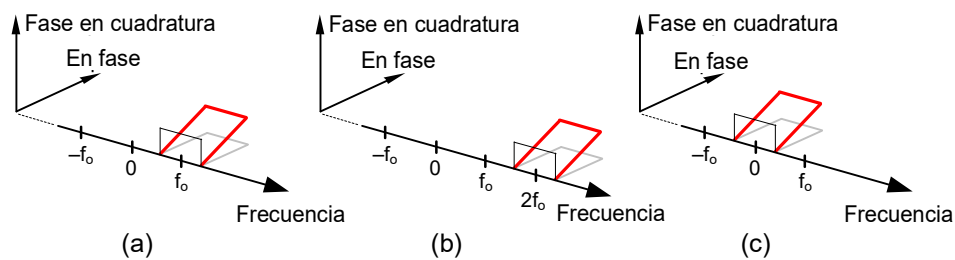


Figura 12. Mezcla en cuadratura de una señal: (a) Espectro de una señal compleja $x(t)$, (b) Espectro de $x(t)e^{j2\pi f_0 t}$, (c) Espectro de $x(t)e^{-j2\pi f_0 t}$.

Utilizaremos ese principio para entender el siguiente ejemplo.

Un ejemplo de muestreo en cuadratura

Podemos aplicar todo lo aprendido hasta ahora sobre señales en cuadratura explorando el proceso de muestreo en cuadratura. El muestreo en cuadratura consiste en digitalizar una señal paso banda continua (analógica) y traducir su espectro para centrarlo en cero Hz. Veamos cómo funciona este popular proceso considerando una señal paso banda continua, de ancho de banda B , centrada en una frecuencia portadora de f_c Hz.

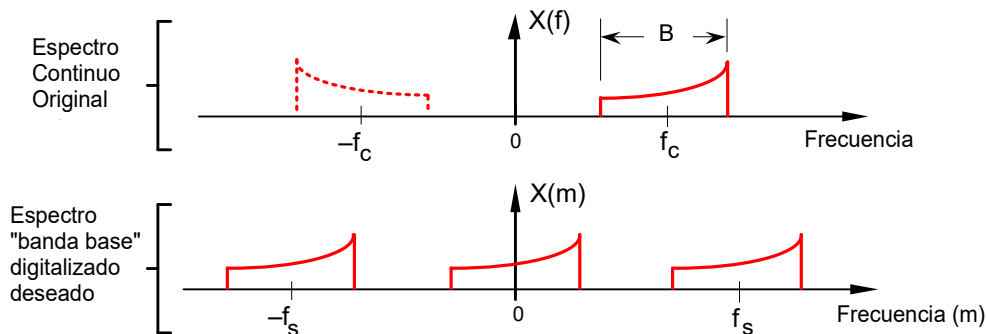


Figura 13. Espectros 'antes y después' de una señal muestreada en cuadratura.

Nuestro objetivo en el muestreo en cuadratura es obtener una versión digitalizada de la señal paso banda analógica, pero queremos que el espectro discreto de dicha señal digitalizada esté centrado en cero Hz, no en f_c Hz. Es decir, queremos mezclar una señal temporal con $e^{-j2\pi f_c t}$ para realizar una conversión descendente compleja. La frecuencia f_s es la frecuencia de muestreo del digitalizador en muestras/segundo. Mostramos espectros replicados en la parte inferior de la Figura 13 para recordar este efecto durante la conversión A/D.

Bien, eche un vistazo al siguiente diagrama de bloques de muestreo en cuadratura conocido como demodulación I/Q (o "demodulación Weaver" para aquellas personas con experiencia en teoría de las comunicaciones) que se muestra en la parte superior de la Figura 14. Esa disposición de dos osciladores sinusoidales, con su diferencia de fase relativa de 90° , a menudo se denomina oscilador en cuadratura.

Los términos $e^{j2\pi f_c t}$ y $e^{-j2\pi f_c t}$ en la concurrida Figura 14 nos recuerdan que las exponenciales complejas constituyentes que componen un coseno real duplican cada parte del espectro $X_{bp}(f)$ para producir el espectro $X_i(f)$. La Figura muestra cómo obtenemos la porción continua en fase filtrada de la señal compleja en cuadratura deseada. Por definición, estos espectros $X_i(f)$ e $I(f)$ se consideran solo reales.

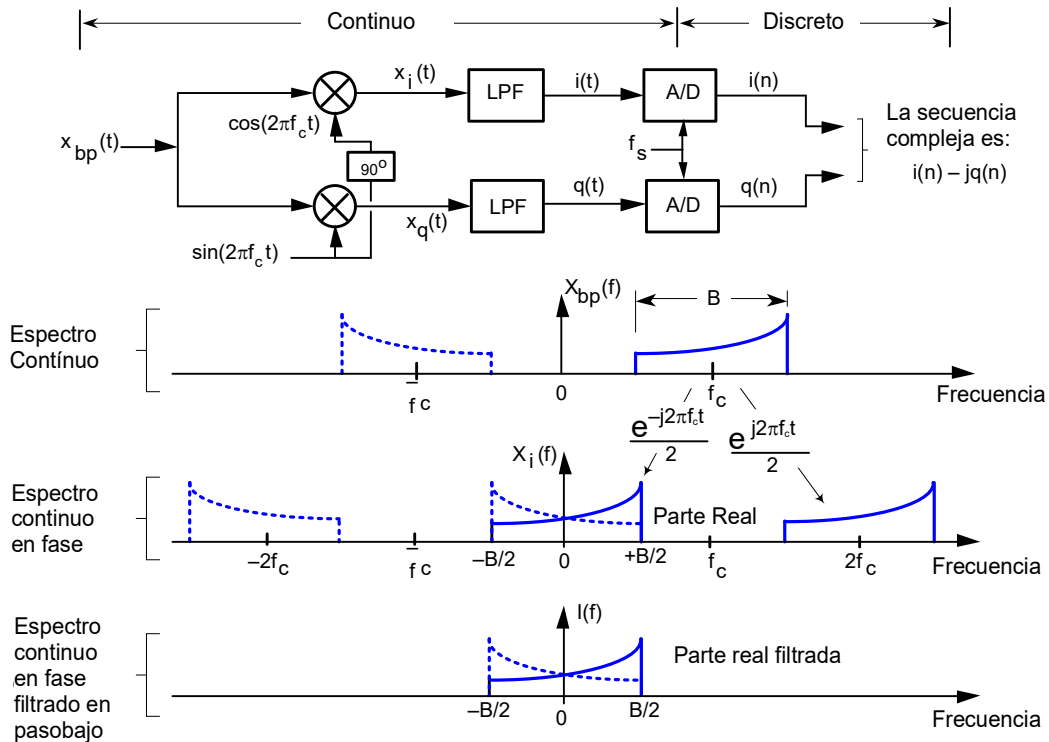


Figura 14. Diagrama de bloques de muestreo en cuadratura y espectros dentro de la ruta de señal en fase (superior).

Asimismo, la Figura 15 muestra cómo obtenemos la porción de fase en cuadratura continua filtrada de nuestra señal en cuadratura compleja mezclando $x_{bp}(t)$ con $\sin(2\pi f_c t)$.

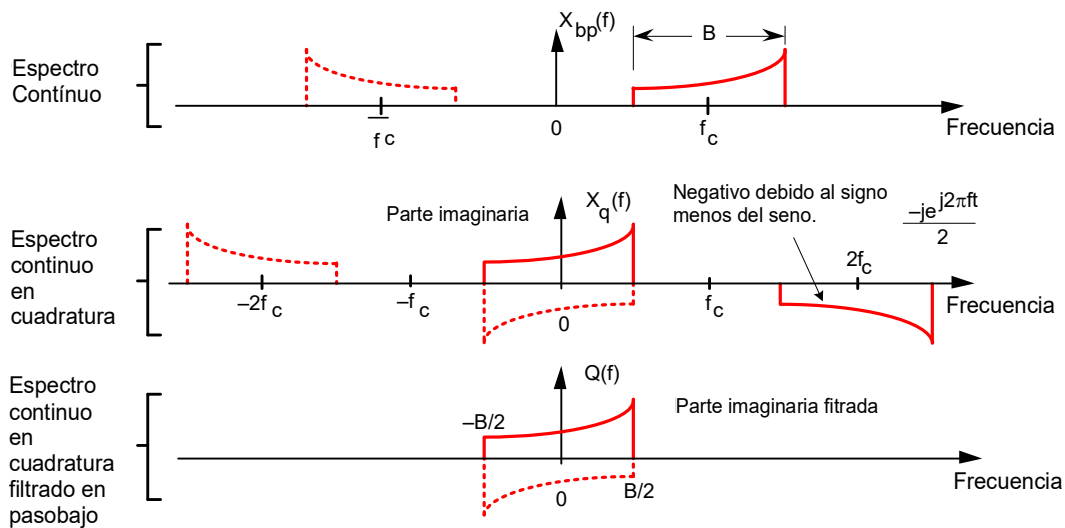


Figura 15. Espectros dentro de la trayectoria de la señal de fase en cuadratura (inferior) del diagrama de bloques.

Aquí es donde vamos: $I(f) - jQ(f)$ es el espectro de una réplica compleja de nuestra señal de paso de banda original $x_{bp}(t)$. Mostramos la suma de estos dos espectros en la Figura 16.

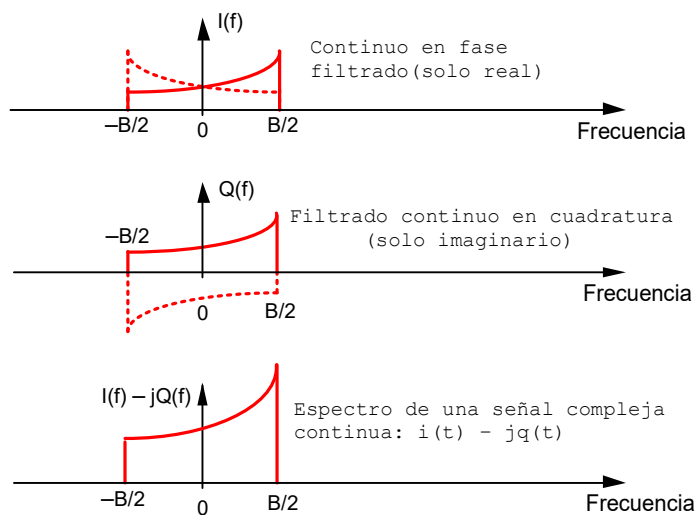


Figura 16. Combinación de los espectros $I(f)$ y $Q(f)$ para obtener los espectros ' $I(f) - jQ(f)$ ' deseados.

Esta representación típica del muestreo en cuadratura parece un galimatías hasta que se analiza la situación desde una perspectiva tridimensional, como en la Figura 17, donde el factor $-j$ rota la $Q(f)$ «solo imaginaria» en -90° , convirtiéndola en «solo real». Esta $-jQ(f)$ se suma entonces a $I(f)$.

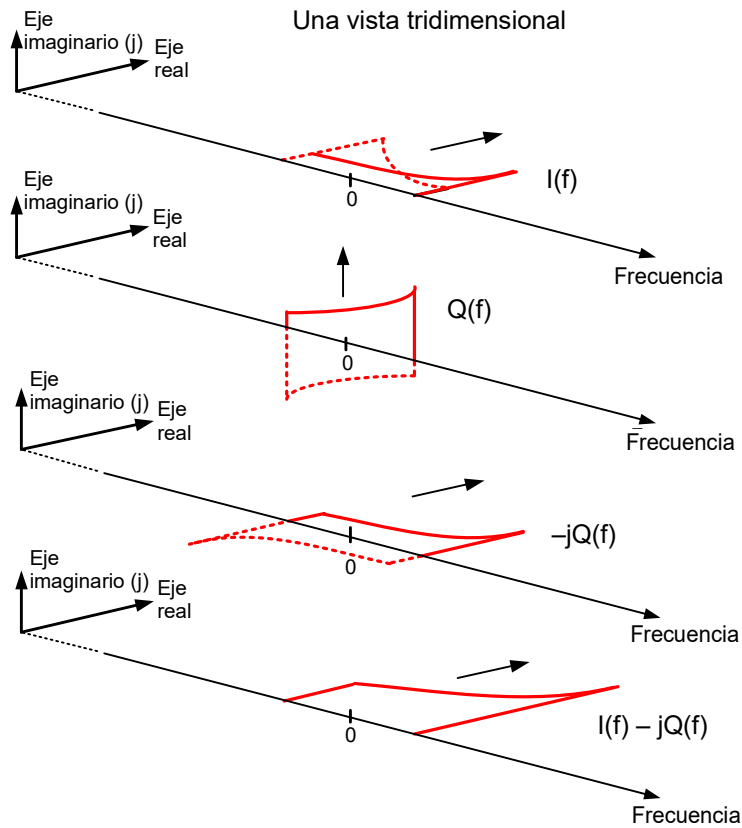


Figura 17. Vista tridimensional de la combinación de los espectros $I(f)$ y $Q(f)$ para obtener los espectros $I(f) - jQ(f)$.

El espectro complejo en la parte inferior de la Figura 18 muestra lo que queríamos, una versión digitalizada de la señal de banda de paso compleja centrada alrededor de cero Hz.

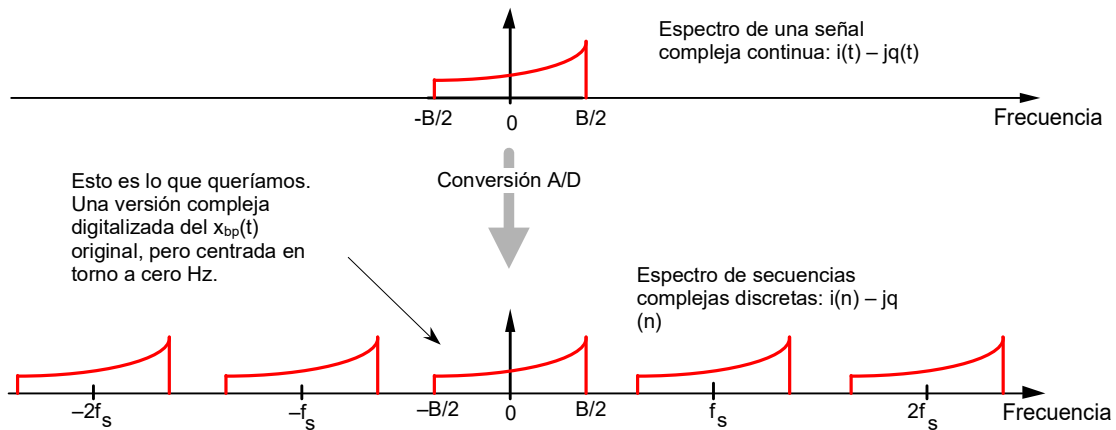


Figura 18. La señal compleja continua $i(t) - q(t)$ se digitaliza para obtener la discreta $i(n) - jq(n)$.

Algunas ventajas de este esquema de muestreo en cuadratura son:

- Cada convertidor A/D opera a la mitad de la frecuencia de muestreo del muestreo de señal real estándar.
- En muchas implementaciones de hardware, operar a frecuencias de reloj más bajas ahorra energía.

- Para una frecuencia de muestreo f_s dada, podemos capturar señales analógicas de banda más ancha.
- Las secuencias en cuadratura hacen que el procesamiento FFT sea más eficiente al cubrir un rango de frecuencias más amplio que cuando la entrada de una FFT es una secuencia de valores reales.
- Dado que las secuencias en cuadratura se sobremuestran eficazmente por un factor de dos, las operaciones de cuadratura de la señal son posibles sin necesidad de sobremuestreo
- Conocer la fase de las señales permite un procesamiento coherente. El muestreo en cuadratura facilita considerablemente la medición con gran precisión de la magnitud instantánea (demodulación AM), la fase instantánea (demodulación de fase) y la frecuencia instantánea (demodulación FM) de la señal de entrada $x_{bp}(t)$ en la Figura 14.

Volviendo al diagrama de bloques de la Figura 14, recordamos una característica importante de las señales en cuadratura. Podemos enviar una señal analógica en cuadratura a una ubicación remota. Para ello, utilizamos dos cables coaxiales por los que viajan las dos señales reales $i(t)$ y $q(t)$. (Para transmitir una secuencia discreta en cuadratura en el dominio del tiempo, necesitaríamos dos cables planos multiconductores, como se indica en la Figura 19).

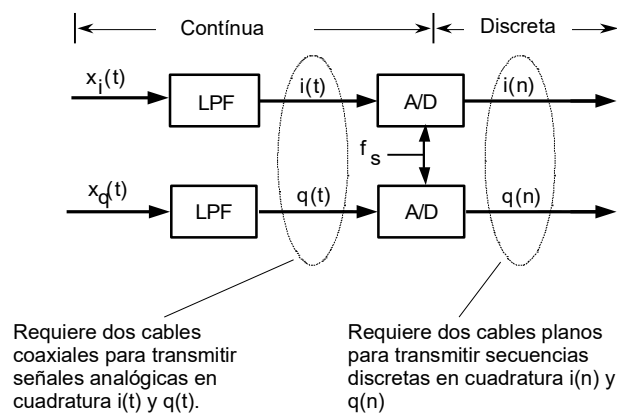


Figura 19. Reiteración de cómo las señales en cuadratura se componen de dos partes reales.

Para comprender el significado físico de nuestra discusión, recordemos que una señal continua en cuadratura $x_c(t) = i(t) + jq(t)$ no es solo una abstracción matemática. Podemos generar $x_c(t)$ en nuestro laboratorio y transmitirla al laboratorio del pasillo. Solo necesitamos dos generadores de señales sinusoidales, configurados a la misma frecuencia f_0 . (Sin embargo, debemos sincronizar estos dos generadores de hardware para que su desfase relativo se fije en 90°). A continuación, conectamos cables coaxiales a los conectores de salida de los generadores y los llevamos, etiquetados como 'i(t)' para la señal coseno y 'q(t)' para la señal sinusoidal, por el pasillo hasta su destino.

Ahora, un cuestionario de dos preguntas. En el otro laboratorio, ¿qué veríamos en la pantalla de un osciloscopio si las señales continuas $i(t)$ y $q(t)$ se conectaran a los canales de entrada horizontal y vertical, respectivamente, del osciloscopio? (Recordando, por supuesto, configurar el control de barrido horizontal del osciloscopio en la posición "Externo").

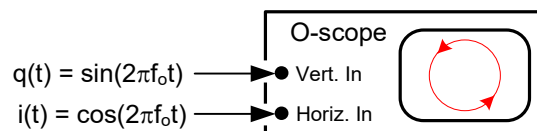


Figura 20. Visualización de una señal en cuadratura utilizando un osciloscopio.

A continuación, ¿qué se vería en la pantalla del osciloscopio si los cables estuvieran mal etiquetados y las dos señales se intercambiaran inadvertidamente?

La respuesta a la primera pregunta es que veríamos un punto brillante girando en sentido antihorario en círculo en la pantalla del osciloscopio. Si se intercambiaran los cables, veríamos otro círculo, pero esta vez orbitaría en sentido horario. Esto sería una buena demostración si fijáramos las frecuencias de los generadores de señales a, por ejemplo, 1 Hz.

Este ejemplo de osciloscopio nos ayuda a responder la importante pregunta: "¿Cómo se implementa el operador j en el hardware cuando trabajamos con señales en cuadratura?". La respuesta es que no podemos comprar un operador j en una tienda física y soldarlo a una placa de circuito. El operador j se implementa mediante el tratamiento de las dos señales entre sí. Debemos tratarlas ortogonalmente, de modo que la señal en fase $i(t)$ represente un valor Este-Oeste, y la señal en fase en cuadratura $q(t)$ represente un valor ortogonal Norte-Sur. (Por ortogonal, me refiero a que la dirección Norte-Sur está orientada exactamente 90° con respecto a la dirección Este-Oeste). Por lo tanto, en nuestro ejemplo de osciloscopio, el operador j se implementa simplemente mediante la forma en que se realizan las conexiones al osciloscopio. La señal en fase $i(t)$ controla la deflexión horizontal y la señal en fase en cuadratura $q(t)$ controla la deflexión vertical. El resultado es una señal de cuadratura bidimensional representada por la posición instantánea del punto en la pantalla del osciloscopio.

Una persona en el laboratorio al final del pasillo que recibe, digamos, las secuencias discretas $i(n)$ y $q(n)$ tiene la capacidad de controlar la orientación de los espectros complejos finales sumando o restando la secuencia $jq(n)$ como se muestra en la Figura 21.

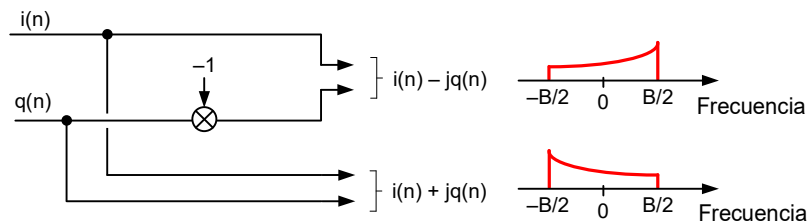


Figura 21. Uso del signo de $q(n)$ para controlar la orientación espectral.

La trayectoria superior en la Figura 21 equivale a multiplicar el $x_{bp}(t)$ original por $e^{-j2\pi fct}$, y la trayectoria inferior equivale a multiplicar el $x_{bp}(t)$ por $e^{j2\pi fct}$. Por lo tanto, si la porción en cuadratura de nuestro oscilador en cuadratura en la parte superior de la Figura 14 hubiera sido negativa, $-\sin(2\pi fct)$, los espectros complejos resultantes estarían invertidos (aproximadamente 0 Hz) con respecto a los espectros mostrados en la Figura 21.

Mientras pensamos en invertir espectros complejos, recordemos que existen dos maneras sencillas de invertir la magnitud espectral de una secuencia $x(n) = i(n) + jq(n)$. Como se muestra en la Figura 21, podemos realizar una conjugación para obtener un espectro $x'(n) = i(n) - jq(n)$ con magnitud invertida. El segundo método consiste en intercambiar los valores de muestra individuales $i(n)$ y $q(n)$ de $x(n)$ para crear una nueva secuencia $y(n) = q(n) + ji(n)$, cuya magnitud espectral se invierte con respecto a la magnitud espectral de $x(n)$. (Cabe destacar que, si bien las magnitudes espectrales de $x'(n)$ e $y(n)$ son iguales, sus fases espectrales no lo son).

Conclusiones

Con esto finaliza nuestro breve tutorial sobre señales en cuadratura. Aprendimos que usar el plano complejo para visualizar las descripciones matemáticas de los números complejos nos permitió comprender la relación entre las señales en cuadratura y las reales. Vimos cómo las representaciones tridimensionales en el dominio de la frecuencia nos ayudan a comprender cómo se generan, traducen en frecuencia, combinan y separan las señales en cuadratura. Finalmente, revisamos un ejemplo de muestreo en cuadratura y dos esquemas para invertir el espectro de una secuencia en cuadratura.



Referencias

- [1] D. Struik, *A Concise History of Mathematics*, Dover Publications, NY, 1967.
[2] D. Bergamini, *Mathematics*, Life Science Library, Time Inc., New York, 1963.
[3] N. Boutin, "Complex Signals," *RF Design*, December 1989.

La respuesta a la pregunta de trivia que sigue a la ecuación (5) es: El espantapájaros en El mago de Oz.

¿Has escuchado esta pequeña historia?

Durante su estancia en Berlín, Leonhard Euler participó a menudo en debates filosóficos, especialmente con Voltaire. Desafortunadamente, su capacidad filosófica era limitada y a menudo cometía errores para diversión de todos los involucrados. Sin embargo, a su regreso a Rusia, se vengó. Catalina la Grande había invitado a su corte al famoso filósofo francés Diderot, quien, para disgusto de la zarina, intentó convertir a sus súbditos al ateísmo. Le pidió a Euler que lo silenciara. Un día en la corte, el filósofo francés, que carecía de conocimientos matemáticos, fue informado de que alguien tenía una prueba matemática de la existencia de Dios. Pidió escucharla. Euler entonces dio un paso al frente y declaró:

"Señor, $\frac{a + b^n}{n} = x$, por lo tanto, Dios existe; ¡responda!".

Diderot no tenía ni idea de qué hablaba Euler. Sin embargo, sí entendió el coro de risas que siguió y poco después regresó a Francia. Aunque es una historia simpática, los historiadores matemáticos serios no la creen. Saben que Diderot tenía algunos conocimientos matemáticos y no pueden imaginarse a Euler haciendo payasadas de esa manera.